سلسلة تمارين – 01-

الإعداد المركبة — الجزء الأول

خواص و علاقات

BAC - 2020

تمرين 01:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية :

$z_0 = \frac{1}{i}$ ؛ $z_1 = \frac{1}{2-i}$ ؛ $z_2 = \frac{1}{(2-3i)(1+i)}$ ؛ $z_3 = \frac{1}{2+3i} + \frac{1}{(1+i)^2}$

$z_4 = \frac{1+2i}{1+i}$ ؛ $z_5 = \frac{3i}{2+i}$ ؛ $z_6 = \frac{1+i}{-1-2i}$ ؛ $z_7 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

تمرين 02:

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون :

- $3x + y - 1 + i(x - y) = 4 - i$
- $2x + 3iy - 1 + i(x - yi + 2) = 3i - 1$
- $x + 2y + i(2x - y + 5) = 0$

الحل المفصل على القناة.
Chaine youtube:
Prof-AhmedTrir

تمرين 03:

عين مرافق كلا من الأعداد المركبة التالية و اكتب النتيجة على الشكل الجبري:

$z_0 = 2 - 9i;\ z_1 = 2i + 5;\ z_2 = i(4+3i);\ z_3 = (1+2i)(-4-3i)$

$z_4 = \frac{1-3i}{1+2i};\ z_5 = \frac{3+i}{i};\ z_6 = \frac{1+i}{-1-2i};\ z_7 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

تمرين 04:

نضع $z_2 = 1+i$; $z_1 = 2-3i$. – أحسب $|z_2|$; $|z_1|$.
أكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد المركبة التالية ثم احسب
طويلة كلا منها: z_1^2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1 \times z_2$; $z_1 + z_2$.

تمرين 05:

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية:

$z_4 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -1 - i$; $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.



تمرين 06:

z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث:

$$z_2=6\left(cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right);z_1=3\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

أوجد الطويلة وعمدة لكل من $\frac{z_1}{z_2}$ و $z_1\times z_2$.

تمرين 07:

z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث $z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)$ و $z_2=1-i$

1) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية: z_1 ، z_2 ، $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ، $Z'=z_1\times z_2$

2) أكتب على الشكل الجبري كلا من Z و Z'.

3) استنتج قيمة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\cos\frac{-5\pi}{12}$ ، $\sin\frac{-5\pi}{12}$.

تمرين 08:

z عدد مركب بحيث $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. أحسب z^2 و z^4.
2. اكتب z^4 على الشكل المثلثي.
3. استنتج الشكل المثلثي للعدد z
4. أحسب $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.
5. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقيا.

تمرين 09:

z_1 ، z_2 ، Z أعداد مركبة بحيث:

$$z_1=-1-i \quad ، \quad z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad Z=z_1\times z_2$$

1. أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية : z_1 ، z_2 ، Z
2. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب Z
3. استنتج قيمة لكل من $\cos\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}$.

تمرين 10:

أكتب على الشكل الجبري كلا من :

$z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_3=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

تمرين 11:

أكتب على الشكل الأسي كلا من :

$z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ، $z_2=\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}$ ، $z_3=1+i$ ، $z_4=-2$ ، $z_5=-2i$.

تمرين 12:

أكتب على الشكل الأسي كلا من:

$z_1 = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$ ، $z_2 = (2+2i)(\sqrt{3}-i)$ ، $z_3 = (-1+i\sqrt{3})^5$.

تمرين 13:

z عدد مركب بحيث $z = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

1. أحسب z^2 .
2. عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z^2 .
3. استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب z .
4. استنتج $\cos\dfrac{17\pi}{12}$ ، $\sin\dfrac{17\pi}{12}$.

تمرين 14:

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية ذات المجهول z واكتب الحلول على الشكل الجبري.

أ) $i\bar{z} = 2-3i$ ب) $z+1 = (1-i)\bar{z}+3+i$

تمرين 15:

أحسب $(2-5i)^2$ و $(\sqrt{3}+2i)^2$ واستنتج الجذرين التربيعيين لكل من العددين : $a = -21-20i$ ، $b = -1+4i\sqrt{3}$.

تمرين 16:

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1 = 1+i$ ؛ $Z_2 = 1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أكتب $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي.عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.



سلسلة تمارين – 02-

الأعداد المركبة — الجزء الثاني

تمرين 01:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

الحل المفصل على القناة.
Chaine youtube:
Prof-AhmedTrir

تمرين 02:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - إكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بين أن النقاط A، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحوّل النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

BAC - 2020

تمرين 03:

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:
$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0 \,\ldots\ldots\,(\text{I})$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

تمرين 04:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6\sqrt{2}\,z+36=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R.

الحل المفصل على القناة.
Chaine youtube:
Prof-AhmedTrir

تمرين05 :

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب) تحقّق أنّ العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق: $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

تمرين 06:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z\neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$.

أ - اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

BAC - 2020

Page FB:
Prof AhmedTrir
Chaine youtube:
Prof-AhmedTrir
instagram:
ProfAhmedTrir

تمرين 07:

1) حَل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بين أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

جـ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$

ثم تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

تمرين 08 :

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-2$

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$.

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

تمرين 09:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$.

1) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C.

2) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) نرمز بـ G الى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I الى منتصف القطعة $[AC]$

عيّن كلاً من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثمّ بيّن أنّ النقط B، G و I في استقامية.

4) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I، حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ) تحقق أنّ النقطة C تنتمي الى (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

تمرين 10:

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B

و C التي لاحقاتها i، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ) عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط D، A و C في استقامية.

ب) استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .